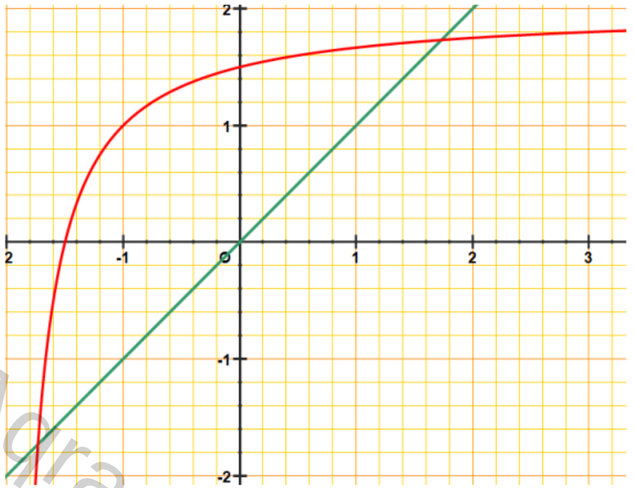
Exercice :

On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{3+2u_n}{2+u_n}$

1°) Dans la figure ci-contre, sont représentées les courbes des fonctions f et g définies par :

$f(x) = \dfrac{3+2x}{2+x}$ et $g(x) = x$



Utiliser ce graphe pour représenter sur l'axe des abscisses, en expliquant, les trois premiers termes de la suite (u_n).

2°) Démontrer par récurrence que u_n est positif pour tout entier naturel n non nul ; en déduire que u_n est défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3°) a) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = a + \dfrac{b}{2+u_n}$

b) En déduire, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \sqrt{3}$

4°) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

5°) On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$

a) Vérifier que pout tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = \dfrac{(2-\sqrt{3})(u_n - \sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(u_n + \sqrt{3})}$

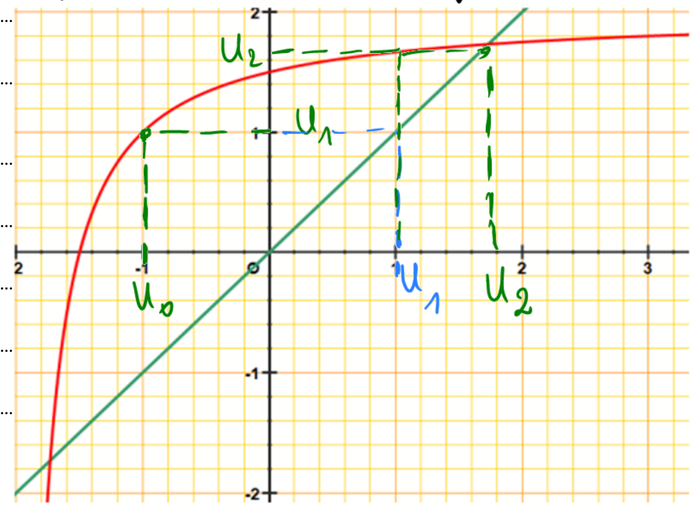
b) En déduire que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $(2-\sqrt{3})^2$

c) Exprimer v_n en fonction de n puis déterminer sa limite.

d) Exprimer u_n en fonction de v_n et en déduire la limite de la suite (u_n).

1°) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

• $u_1 = f(u_0)$ • $u_2 = f(u_1)$



Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn